STATISTIQUE : CES NOTIONS QUE TOUT LE MONDE DOIT SAVOIR – Par Lassana CISSOKHO *

■ DEFINITIONS ET VOCABULAIRE

• POPULATION

Une population statistique est un ensemble. Cet ensemble peut être un ensemble de personnes, d'animaux ou de choses etc.

• INDIVIDU OU UNITÉ STATISTIQUE

Un élément de cet ensemble s'appelle individu ou unité statistique.

• CARACTÈRES

Les individus sont répartis suivant une propriété caractéristique appelée caractère.

A/ CARACTÈRE QUALITATIF

Le caractère est dit qualitatif s'il n'est pas mesurable.
Exemple : Répartir les individus d'une population statistique suivant la race,
ou suivant l'ethnie, ou suivant la région d'appartenance, ou suivant la couleur de leur peau ....

B/ CARACTÈRE QUANTITATIF

Le caractère est dit quantitatif s'il est mesurable. On y distinguera :

1°/ CARACTÈRE QUANTITATIF DISCRET

Le caractère prend des valeurs isolées. Exemples : Classer (on dit aussi répartir) les individus selon la note sur 20, ou selon la taille etc.

2°/ CARACTÈRE QUANTITATIF CONTINU

Le caractère peut prendre toute valeur dans un intervalle donné.
Exemples : Répartir les individus ayant des notes comprises entre 10 et 12 ou ayant des poids supérieurs ou égaux à 60 kg et inférieurs ou égaux à 80 kg.
ou ayant des tailles comprises entre 1,60 m et 2 m.

• MODALITÉ

Les différentes valeurs du caractère sont appelées modalités.

• EFFECTIF TOTAL – EFFECTIF PARTIEL

1°) On appelle effectif total, le nombre total d'individus de la population
2°) On appelle effectif partiel correspondant à une valeur du caractère le nombre total d'individus satisfaisant à la valeur du caractère.

APPLICATION

EXERCICE N°1

On a réparti les 50 élèves d'une classe de troisième d'une école multinationale selon leur nationalité. On a dénombré :

- **12 sénégalais,**
- **10 maliens, 8 béninois,**
- **10 camerounais,**
- **3 ivoiriens**
- **et 7 burkinabés.**

1°) Quelle est la population étudiée ?
2°) Déterminer la nature du caractère étudié.
3°) Donner les différentes valeurs du caractère étudié.

SOLUTION

1°) Donnons la population étudiée

La population statistique étudiée est un ensemble de personnes composées d'élèves et au nombre de 50.

2°) Déterminons la nature du caractère étudié.

Le caractère est qualitatif se rapportant à la nationalité et ne peut être mesurable ; il est donc qualitatif.

3°) Donner les différentes valeurs du caractère étudié.

Les valeurs du caractère sont les différentes nationalités et on y distingue:

- la nationalité malienne
- la nationalité sénégalaise
- la nationalité béninoise
- la nationalité camerounaise
- la nationalité ivoirienne
- la nationalité burkinabé

On a donc au total 6 valeurs ou modalités prises par le caractère.

■ TABLEAU STATISTIQUE

On organise souvent les données dans un tableau appelé tableau statistique comportant deux lignes :

1°) La première ligne contient les différentes modalités ou encore valeurs du caractère.

2°) La deuxième ligne contient des effectifs partiels de chaque modalité.

■ REPRÉSENTATIONS

On peut traduire les données d'un tableau statistique :

1°) par un diagramme circulaire

2°) par un diagramme semi-circulaire

3°) par un diagramme à bâtons

4°) par un diagramme à bandes

APPLICATION

EXERCICE N° 2

Une enquête menée auprès de 30 agents d'un établissement sur leur temps de pause (exprimé en mn) a donné les résultats suivants:

60	80	60	70	70	80	80	80	80	70
70	70	60	60	70	70	80	70	70	80
70	70	80	60	80	70	70	80	70	70

1°) Quelle est la population étudiée?

2°) Déterminer la nature du caractère étudié.

Donner les valeurs des différentes modalités.

3°) Organiser les données dans un tableau statistique.

4°) Représenter les effectifs de la série par un diagramme circulaire puis par un diagramme semi-circulaire.

SOLUTION

1°) Déterminons la population étudiée

La population étudiée est un ensemble de personnes.

2°) Déterminons la nature du caractère étudié

Le caractère porte sur le temps, donc mesurable ; le caractère est donc un caractère quantitatif discret et prend trois modalités : 60 ; 70 et 80.

3°) Organisons les données dans un tableau statistique.

On a répété 5 fois 60 ; 15 fois 70 et 10 fois 80 donc on a :

Modalités	**60**	**70**	**80**	**Total**
Effectifs	**5**	**15**	**10**	**30**
Angles en degrés	**60**	**180**	**120**	**360**
Angles en degrés	**30**	**90**	**60**	**180**

4°) Représentation les effectifs par un diagramme circulaire.

A l'effectif total 30, on lui fait correspondre un angle plein (360°).

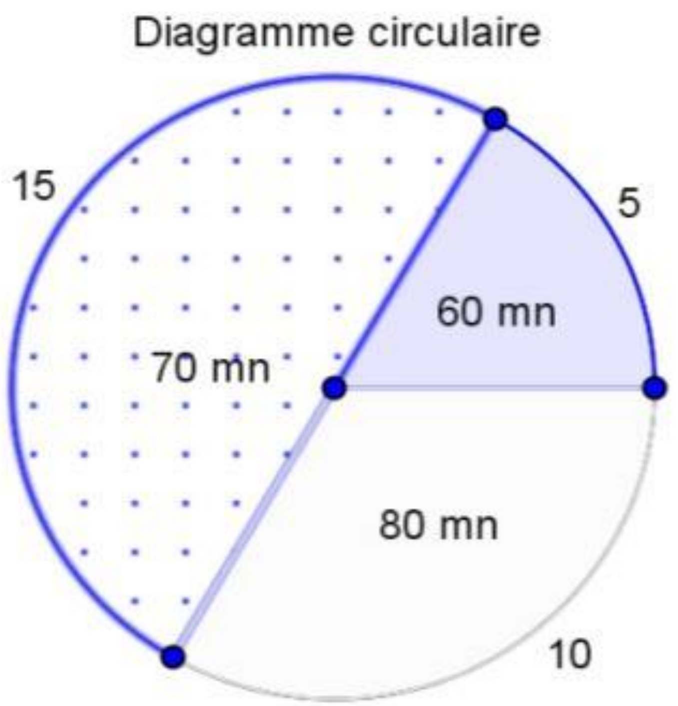
Il s'ensuit qu'à l'effectif partiel 5, il lui correspond un angle au centre de : $\frac{360^0 \times 5}{30} = 60^0$.

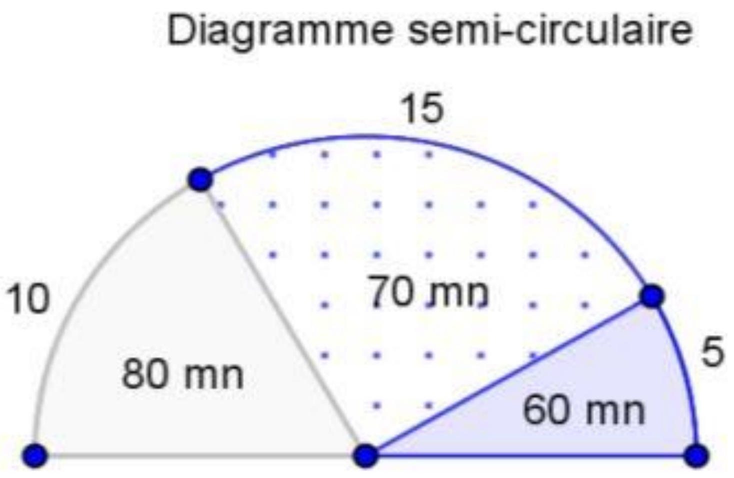
A l'effectif partiel 15, on a un angle au centre de : $60^0 \times 3 = 180^0$.

A l'effectif partiel 10, on a un angle au centre de : $60^0 \times 2 = 120^0$.

En diagramme semi-circulaire, on fait correspondre à l'effectif total un secteur angulaire de 180^0 et ensuite on calcule les secteurs angulaires correspondant respectivement aux effectifs 5, 15 et 10.

On a donc :





■ CENTRE ET AMPLITUDE D'UNE CLASSE

1°) Dans une série à caractère quantitatif continu, on appelle centre d'une classe ou encore valeur centrale la demie somme des deux bornes de la classe.

Exemple, en considérant la classe $[a; b[$ son centre est $\frac{a+b}{2}$

2°) Dans une série à caractère quantitatif continu, on appelle amplitude d'une classe la différence de la borne supérieure et la borne inférieure.

Exemple, en considérant la classe $[a; b[$ son amplitude est $b - a$

• PROPRIETE

Si les amplitudes des classes sont d'égale valeur alors la différence entre de centres de classes successifs est égale à la valeur de l'amplitude.

APPLICATION

EXERCICE N° 3

On a mesuré les diamètres en de 20 disques et les résultats sont consignés dans le tableau statistique ci-après :

Modalités	$[0; 10[$	$[10; 20[$	$[20; 30[$	Total
Effectifs	7	10	3	20

1°) Calculer l'étendue de la série.
2°) Reprendre le tableau et le compléter par les centres des classes.
3°) Représenter la série par un diagramme à bandes.

SOLUTION

1°) Calculons l'étendue de la série.

Les deux valeurs extrêmes sont 0 et 30, alors l'étendue E de la série est telle que : $E = 30 - 0 = 30$.

2°) Reprenons le tableau et le compléter par les centres des classes.

Les classes sont d'égale amplitude égale à 10.

La classe $[0; 10[$ a pour centre : $\frac{0+10}{2} = 5$.

On en déduit successivement :

La classe $[10; 20[$ a pour centre : $5 + 10 = 15$.

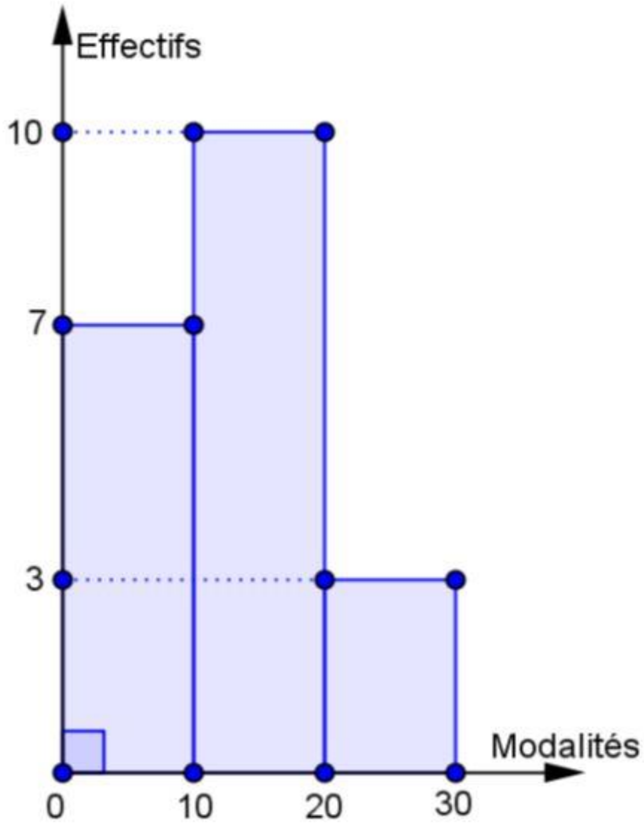
La classe $[20; 30[$ a pour centre : $15 + 10 = 25$

Il vient :

Modalités	$[0; 10[$	$[10; 20[$	$[20; 30[$	Total
Centres	5	15	25	
Effectifs	7	10	3	20

3°) Représentons la série par un diagramme à bandes.

Prenons un effectif pour 0,5 cm alors les effectifs 7, 10 et 3 seront représentés par des bandes de hauteurs respectives 3,5 cm ; 5 cm et 1,5 cm et ont même largeur. Il vient :



■ FRÉQUENCE

• DÉFINITION

La fréquence f d'une modalité est le rapport : $\frac{\textbf{Effectif partiel}}{\textbf{Effectif total}}$

• PROPRIÉTÉ

La somme totale des fréquences est égale à 1.

■ POURCENTAGE

• DÉFINITION

Le pourcentage P d'une modalité est le rapport : $\frac{\textbf{Effectif partiel}\times\textbf{100}}{\textbf{Effectif total}}$

• PROPRIÉTÉ

La somme totale des pourcentages est égale à 100.

■ MODE

Dans une série statistique, la modalité qui a le plus grand effectif ou encore la plus grande fréquence ou encore le plus grand pourcentage est appelé mode.

APPLICATION

EXERCICE N° 4

Une enquête menée auprès de 25 chefs de famille d'une localité sur leur alimentation préférée pour la rupture du jeûne durant le mois de Ramadan a donné les résultats suivants

Modalités	Bouillie de mil	Pain beurré	Croissants	Total
Effectifs	8	10	7	25

1°) Quelle est la nature du caractère étudié ?
2°) Reprendre et compléter le tableau :
a) par la ligne des fréquences
b) par la ligne des pourcentages.
3°) Déterminer le mode de la série.
Que peut-on en déduire ?

SOLUTION

1°) Déterminons la nature du caractère

Les 25 chefs de familles de famille sont répartis suivant leur préférence alimentaire donc le caractère étudié est un caractère qualitatif portant sur trois modalités : Bouillie de mil ; Pain et Croissants.

2°) Reprenons et complétons le tableau par les fréquences et par les pourcentages :

a) Calculons les fréquences.

• Calculons la fréquence f de la modalité Bouillie de mil :

Comme l'effectif partiel de la modalité Bouillie de mil est 8 alors :

$f = \frac{8}{25} = 0{,}32$

On en déduit que son pourcentage qui est $p = \frac{8}{25} \times 100 = 32$.

Alors 32% des chefs de familles rompent le jeûne avec de la bouille de mil.

• Pour la modalité Pain beurré, on a : $f = \frac{10}{25} = 0{,}40$ et $p = \frac{10}{25} \times 100 = 40$

Alors 40% des chefs de familles rompent le jeûne avec du pain beurré.

• Pour la modalité Croissants, on a : $f = \frac{7}{25} = 0{,}28$ et $p = \frac{7}{25} \times 100 = 28$

Alors 28% des chefs de familles rompent le jeûne avec des croissants.

Il vient :

Modalités	Bouillie de mil	Pain beurré	Croissants	Total
Effectifs	8	10	7	25
Fréquences f	0,32	0,40	0,28	1
Pourcentages p ou $f\%$	32	40	28	100

3°) Déterminons et explicitons le mode.

La modalité Pain beurré a le plus grand effectif partiel qui est 10 c'est donc le mode de la série.

Cela signifie que la majorité des 25 chefs de famille utilise le pain au moment de la rupture du jeûne.

Le Pain Beurré est l'aliment le plus préféré dans cette localité.

■ DÉFINITIONS

• EFFECTIF CUMULÉ CROISSANT

1°) On appelle effectif cumulé croissant d'une modalité la somme des effectifs partiels des modalités lui précédant y compris l'effectif partiel de la modalité elle-même.

2°) Le premier effectif cumulé croissant est l'effectif partiel de la première modalité et le dernier effectif cumulé croissant est l'effectif total.

Remarque : Les mêmes définitions s'appliquent aux fréquences cumulées croissantes aux pourcentages cumulés croissants.

• EFFECTIF CUMULÉ DECROISSANT

1°) On appelle effectif cumulé décroissant d'une modalité la différence de l'effectif total de la série et la somme des effectifs partiels des modalités lui précédant.

2°) Le premier effectif cumulé décroissant est l'effectif total et le dernier effectif cumulé décroissant est l'effectif partiel de la dernière modalité.

Remarque : Les mêmes définitions s'appliquent aux fréquences cumulées décroissantes aux pourcentages cumulés décroissants.

■ PROPRIÉTÉS

• La différence de deux effectifs cumulés successifs est égale à l'effectif partiel de la modalité ayant le plus grand effectif cumulé.

• La différence de deux fréquences cumulées successives est égale à la fréquence de la modalité ayant la plus grande fréquence cumulée.

● La différence de deux pourcentages cumulés successifs est égale au pourcentage de la modalité ayant le plus grand pourcentage cumulé.

APPLICATION

EXERCICE N° 5

Après avoir taillé ses planches en bois, un menuisier les a réparties selon leurs longueurs exprimées en cm comme suit :

Modalités	$[100; 110[$	$[110; 120[$	$[120; 130[$	$[130; 140[$	Total
Effectifs	8	10	7	25	50

1°) Reprendre et compléter le tableau par la ligne :
a) des effectifs cumulés croissants.
b) des effectifs cumulés décroissants
c) des pourcentages cumulés croissants
d) des pourcentages cumulés décroissants
2°) Que signifie l'effectif cumulé 18 ? l'effectif cumulé 42 ?
3°) Du tableau, donner le pourcentage des planches ayant leurs longueurs supérieures ou égales à 120 cm.

SOLUTION

1°) Reprenons et complétons le tableau

● Déterminons les effectifs cumulés croissants $(E.C.C)$
L'effectif cumulé croissant de la modalité $[100; 110[$ est : 8
Celui de la modalité $[110; 120[$ est : $8 + 10 = 18$
Celui de la modalité $[120; 130[$ est : $8 + 10 + 7 = 25$
Celui de la modalité $[130; 140[$ est : $8 + 10 + 7 + 25 = 50$.
● Déterminons les effectifs cumulés décroissants $(E.C.D)$
L'effectif cumulé décroissant de la modalité $[100 ; 110[$ est : 50
Celui de la modalité $[110 ; 120[$ est : $50 - 8 = 42$
Celui de la modalité $[120 ; 130[$ est : $42 - 10 = 32$
Celui de la modalité $[130 ; 140[$ est : $32 - 7 = 25$.
On procédera de la même pour les pourcentages cumulés.
Il vient :

Modalités	$[100 ; 110[$	$[110 ; 120[$	$[120 ; 130[$	$[130 ; 140[$	Total
Effectifs	8	10	7	25	50
$E.C.C$	8	18	25	50	
$E.C.D$	50	42	32	25	
$f\%$	16	20	14	50	100
$P.C.C$	16	36	50	100	
$P.C.D$	100	84	64	50	

2°)

- 18 est l'effectif cumulé croissant relatif à la modalité $[110 ; 120[$

et signifie qu'il y a au total 18 planches ayant leurs longueurs inférieures à 120 cm.

- 42 est l'effectif cumulé décroissant relatif à la modalité $[110 ; 120[$

et signifie qu'il y a au total 42 planches ayant leurs longueurs au moins égales à 110 cm.

3°) Du tableau, on peut dire que c'est le pourcentage cumulé décroissant relatif à la modalité $[120 ; 130[$, donc 50%.

EXERCICE N° 6

Un professeur d'éducation physique et sportive a relevé les résultats d'une épreuve de vitesse effectuée sur 200 m par des candidats au brevet comme suit :

Temps (s)	5	7	8	10
$E.C.C$	5	15	35	50

1°) Reprendre et compléter le tableau par les effectifs.
2°) Exprimer la vitesse en m/s réalisée par la majorité des candidats.

SOLUTION

1°) Reprenons et complétons le tableau par les effectifs.

- Le premier effectif cumulé croissant est l'effectif de la première modalité alors la modalité 5 a pour effectif partiel 5.
- 5 et 15 sont deux effectifs cumulés successifs.

La modalité 7 contient le plus grand effectif cumulé qui est 15 donc l'effectif partiel relatif à la modalité 7 est : $15 - 5 = 10$

- 15 et 35 sont deux effectifs cumulés successifs et ont pour différence 20

La modalité 8 contient le plus grand effectif cumulé qui est 35 donc l'effectif partiel relatif à la modalité 8 est : $35 - 15 = 20$.

- 35 et 50 sont deux effectifs cumulés successifs.

La modalité 10 contient le plus grand effectif cumulé qui est 50 donc l'effectif partiel relatif à la modalité 10 est : $50 - 35 = 15$

Il vient :

Temps (s)	5	7	8	10
$E.C.C$	5	15	35	50
Effectifs	5	10	20	15

2°) Exprimons la vitesse en m/s réalisée par la majorité des candidats.

La modalité 8 a le plus grand effectif alors c'est le mode de la série.

La majorité des sportifs a mis 8s pour parcourir les 200 m.

La vitesse $V = \frac{1m}{s} \times \frac{200}{8} = 25$ m/s.

EXERCICE N° 7

Le tableau statistique ci-dessous a été dressé par le comptable d'une direction
de bourses scolaires (Montant en milliers de francs CFA)

Montants	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$
$E.C.D$	50	45	35	15

1°) Tracer l'histogramme des effectifs.
2°) Calculer le pourcentage des bourses égales à 30 000 f et inférieures à 50 000 f

SOLUTION

1°)

a) Déterminons d'abord les effectifs partiels relatifs à chaque modalité.

• 50 et 45 sont deux effectifs cumulés successifs.

La modalité $[20;30[$ contient le plus grand effectif cumulé qui est 50 donc l'effectif partiel relatif à la modalité $[20;30[$ est : $50 - 45 = 5$

• 45 et 35 sont deux effectifs cumulés successifs.

La modalité $[30;40[$ contient le plus grand effectif cumulé qui est 45 donc l'effectif partiel relatif à la modalité $[30;40[$ est : 10.

• 35 et 15 sont deux effectifs cumulés successifs.

La modalité $[40;50[$ contient le plus grand effectif cumulé qui est 35 donc l'effectif partiel relatif à la modalité $[40;50[$ est : $35 - 10 = 20$

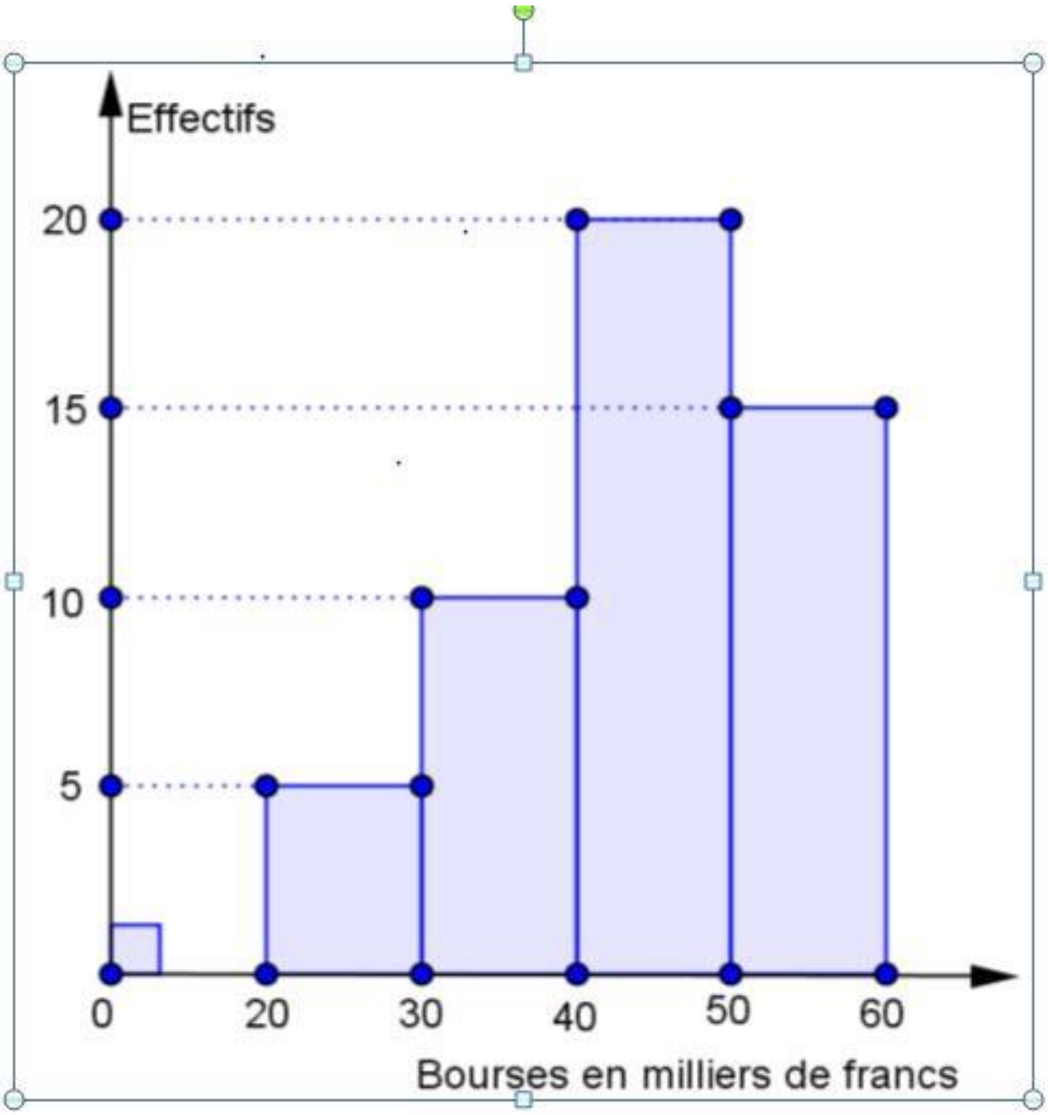
• Le dernier effectif cumulé décroissant est l'effectif partiel relatif à la dernière modalité donc l'effectif partiel relatif à la modalité $[40;50[$ est 15.

Il vient :

Montants	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$
$E.C.D$	50	45	35	15
Effectifs	5	10	20	15

b) Traçons l'histogramme.

En prenant 1 unité de longueur pour 10 en milliers de francs sur l'axe des abscisses et 1 unité de longueur pour 5 effectifs sur l'axe des ordonnées, il vient :



2°) Calculons le pourcentage des bourses égales à 30 000 f et inférieures à 50 000 f

• Calculons le pourcentage de chaque modalité.

Pour la modalité $[20; 30[$, on a : $P = \frac{5\times100}{50} = 10$

Par proportionnalité, on a :

Pour la modalité $[30; 40[$, on a : $P = 10 \times 2 = 20$

Pour la modalité $[40; 50[$, on a : $P = 10 \times 4 = 40$

Pour la modalité $[50; 60[$, on a : $P = 10 \times 3 = 30$

• Calculons le pourcentage des bourses égales à 30 000 f et inférieures à 50 000 f

C'est la somme des pourcentages des classes $[30; 40[$ et $[40; 50[$

On a donc : $20 + 40 = 60$

60% des bourses sont égales à 30 000 f et inférieures à 50 000 f.

■ VOCABULAIRE

Dans les calculs des effectifs cumulés et des pourcentages cumulés, il y a des termes qui renvoient à leur utilisation.
Ce sont des termes tels que :

- Combien « ...ont moins de.... »

« ...**moins de**... » renvoie à l'inégalité : $<$
Exemple : Combien d'élèves ont moins de 9, signifie : les élèves qui ont des valeurs inférieures à 9.

- Combien « ...ont au plus... »

« ... **au plus**... » renvoie à l'inégalité : $\leq$
Exemple : Combien d'élèves ont au plus 9, signifie : les élèves qui ont des valeurs inférieures ou égales à 9.

- Combien « ...ont plus de... »

« ... **plus de**... » renvoie à l'inégalité : $>$
Exemple : Combien d'élèves ont plus de 9, signifie : les élèves qui ont des valeurs supérieures à 9.

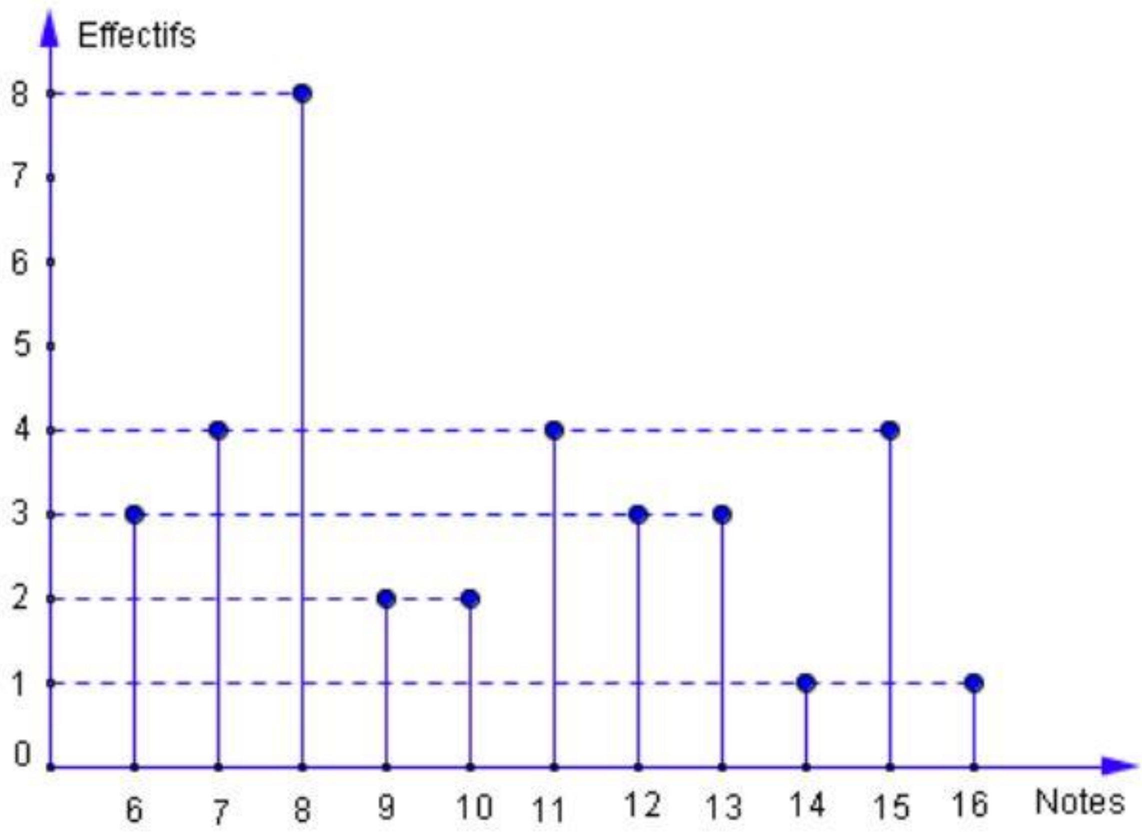
- Combien « ...ont au moins... »

« ...**au moins**... » renvoie à l'inégalité **:** $\geq$
Exemple : Combien d'élèves ont au moins 9, signifie : les élèves qui ont des valeurs supérieures ou égales à 9.

APPLICATION

EXERCICE N° 8

Le diagramme à bâtons ci-dessous donne la répartition des notes obtenues par 35 élèves d'une classe de troisième suite à un devoir de mathématiques.
Lors de ce devoir, il n'y a eu aucune absence des élèves.



1°) Reprendre et compléter, en vous référant aux données apportées par le diagramme, le tableau suivant

Notes sur 20	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
E.C.C	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
E.C.D	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

2°) Combien d'élèves ont moins de 11 ?
3°) Combien d'élèves ont au plus 11 ?
4°) Combien d'élèves ont plus de 9 ?
5°) Combien d'élèves ont au moins 9 ?

SOLUTION

1°) Reprenons et complétons, en nous référant aux données apportées par le diagramme.
On a :

Notes sur 20	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs	3	4	8	2	2	4	3	3	1	4	1
ECC	3	7	15	17	19	23	26	29	30	34	35
ECD	35	32	28	20	18	16	12	9	6	5	1

2°) Le nombre N d'élèves ayant moins de 11
Le nombre N d'élèves ayant moins de 11, ce sont des élèves dont leurs notes sont inférieures à 11. N est donc l'effectif cumulé croissant relatif à la modalité 10 et du tableau, il vient : $N = 19$.
3°) Le nombre N d'élèves ayant au plus 11
Ce sont les élèves qui ont 11 ou moins de 11.
N est égal à l'effectif cumulé croissant relatif à la modalité 11 et du tableau, on a : $N = 23$
4°) Le nombre N d'élèves ayant plus de 9
Ce sont des élèves qui ont 10 ou plus de 10, c'est-à-dire des élèves qui ont au moins 10. Leur nombre est l'effectif cumulé décroissant de la modalité 10.
Du tableau, il vient : $N = 18$
5°) Le nombre N d'élèves ayant au moins 9
Il s'agit des élèves qui ont 9 ou plus de 9.
Leur nombre est donc l'effectif cumulé décroissant de la modalité 9.
Du tableau, il vient : $N = 20$

■ POLYGONE DES EFFECTIFS OU DES FRÉQUENCES OU DES POURCENTAGES

On peut tracer le polygone des effectifs :

- Soit à partir d'un diagramme à bâtons : on obtient le polygone en reliant successivement les bouts supérieurs des bâtons.
- Soit à partir d'un diagramme à bandes : on obtient le polygone en reliant successivement les milieux des largeurs supérieures des bandes.

APPLICATION

EXERCICE N° 9

Un pédiatre a pesé ses patients et a consigné les résultats dans le tableau statistique comme suit :

Modalités	$1 \leq P < 3$	$3 \leq P < 5$	$5 \leq P < 7$	$7 \leq P < 9$
Effectifs	2	8	6	4

NB : La pesée est effectuée en kg.

1°) Reprendre et compléter le tableau statistique du pédiatre par les effectifs cumulés croissants et par les effectifs cumulés décroissants.

2°) Tracer l'histogramme des effectifs et tracer le polygone de ces effectifs.

3°) Tracer l'histogramme des effectifs cumulés croissants et tracer le polygone de ces effectifs.

SOLUTION

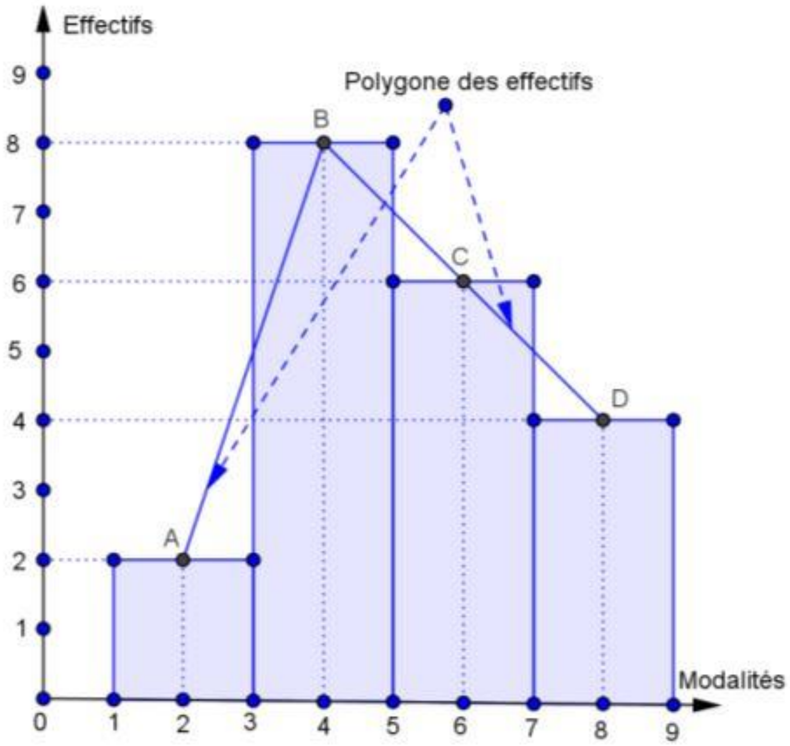
1°) Reprenons et complétons le tableau du pédiatre par les effectifs cumulés croissants et par les effectifs cumulés décroissants.

On a :

Modalités	$1 \leq P < 3$	$3 \leq P < 5$	$5 \leq P < 7$	$7 \leq P < 9$	Total
Effectifs	2	8	6	4	20
E.C.C	2	10	16	20	
E.C.D	20	18	10	4	

2°) Traçons l'histogramme des effectifs et tracer le polygone de ces effectifs.

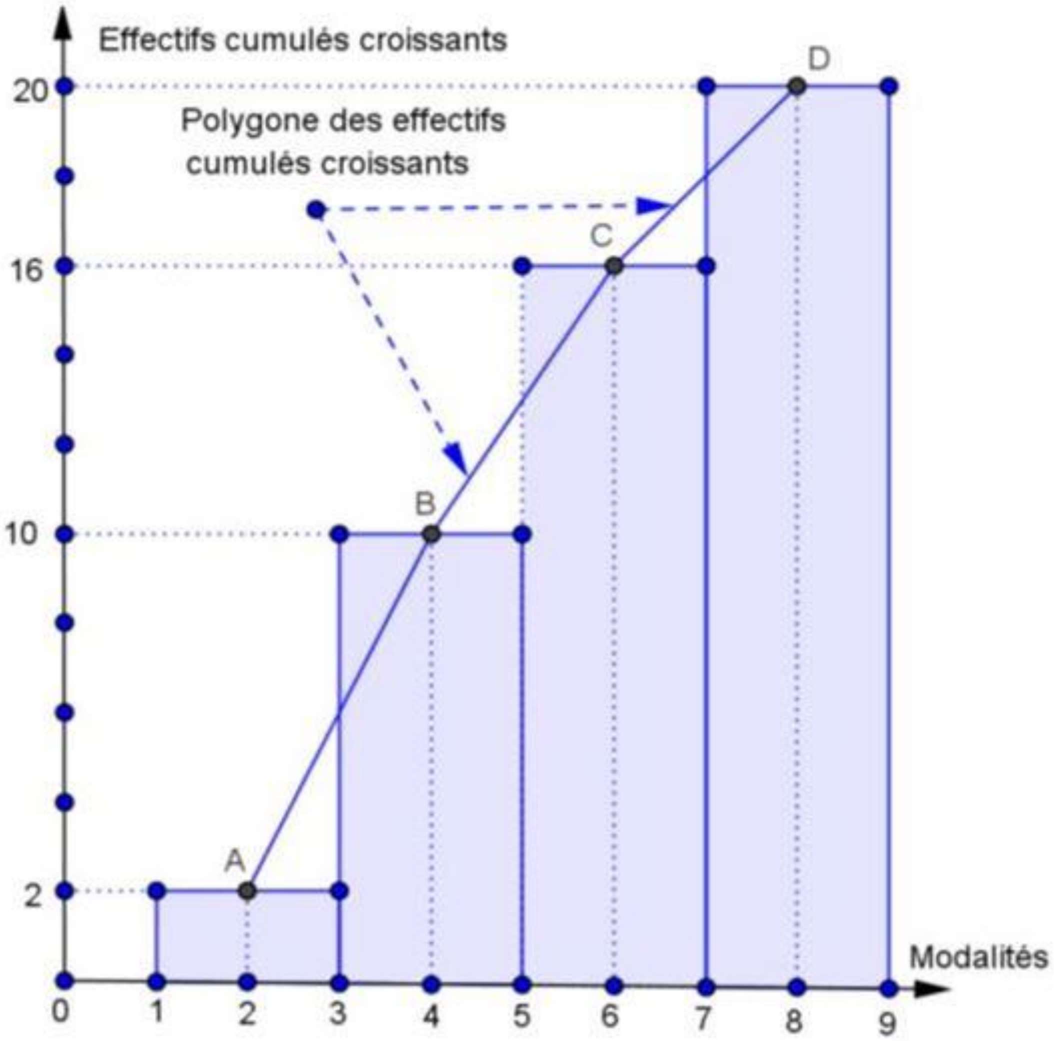
Nous avons :



Le polygone des effectifs passe par les points $A(2\,;2)$; $B(4\,;8)$; $C(6\,;6)$ et $D(8\,;4)$.

3°) Traçons l'histogramme des effectifs cumulés croissants et tracer le polygone de ces effectifs.

En prenant 1 cm pour 2 effectifs, on a la figure ci-après :



Le polygone des effectifs passe par les points $A(2\,;2)$; $B(4\,;10)$; $C(6\,;16)$ et $D(8\,;20)$.

■ COURBE CUMULATIVE OU DIAGRAMME DES EFFECTIFS CUMULÉS OU DES FRÉQUENCES CUMULÉES OU DES POURCENTAGES CUMULÉS

On obtient la courbe cumulative ou diagramme en reliant successivement les bornes des classes par des segments.

APPLICATION

EXERCICE N° 10

On reconsidère les données de l'exercice précédent à partir du tableau du pédiatre.
Tracer l'histogramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants et puis tracer la courbe cumulative des effectifs cumulés croissants et celle des effectifs cumulés décroissants.

SOLUTION

Traçons l'histogramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants et traçons les courbes cumulatives. On a :

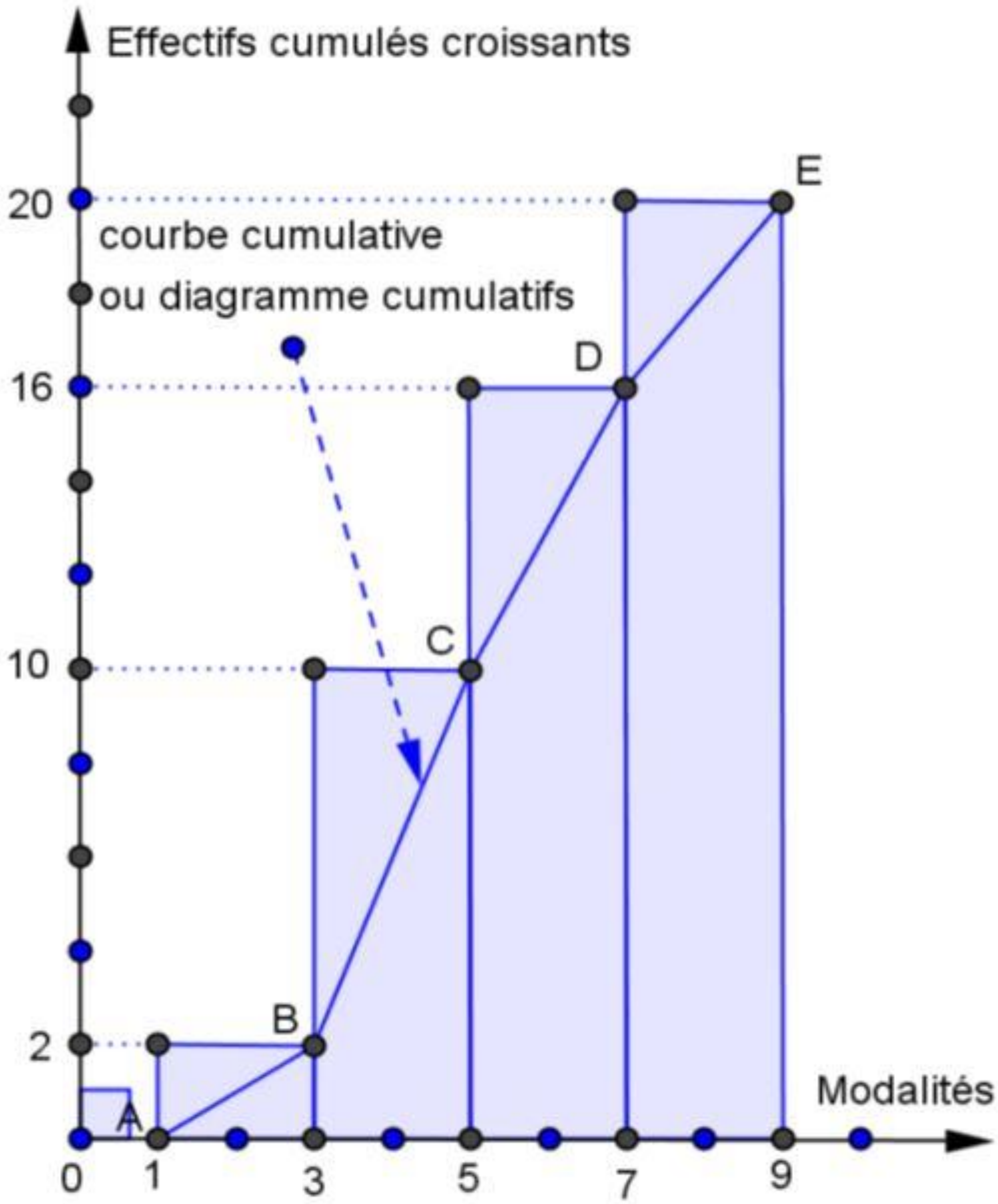


Figure 1

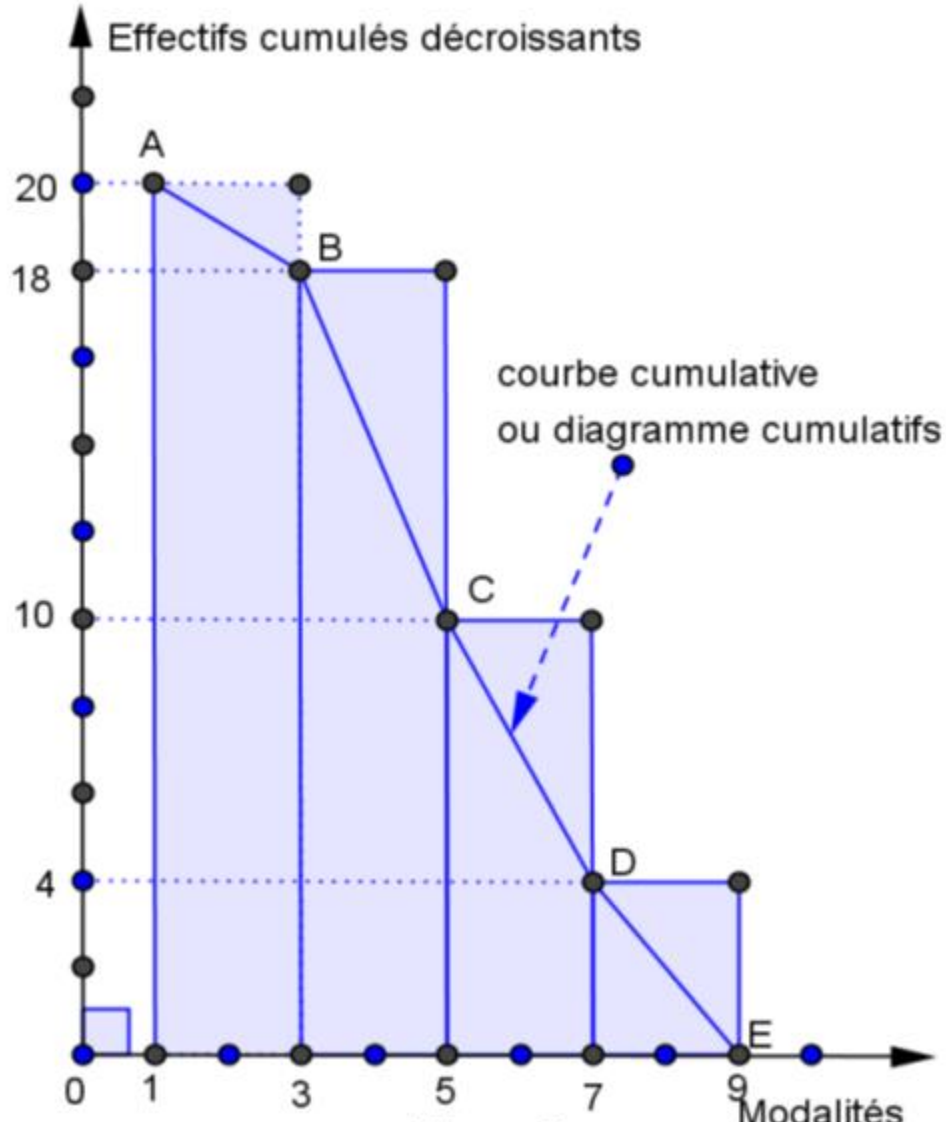


Figure 2

La courbe cumulative des effectifs cumulés croissants passe par les points $A(1\,;0)$; $B(3\,;1)$; $C(5\,;5)$; $D(7\,;8)$ et $E(9\,;20)$. Figure 1.
La courbe cumulative des effectifs cumulés décroissants passe par les points $A(1\,;20)$; $B(3\,;18)$; $C(5\,;10)$; $D(7\,;4)$ et $E(9\,;0)$. Figure 2.

■ CALCUL DE L'ÉTENDUE

Dans le cas d'une série ordonnée et à caractère quantitatif, on appelle l'étendue de la série la différence de la plus grande valeur et la plus petite.

■ CALCUL DE LA MOYENNE

• DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF DISCRET

On envisage deux cas :

PREMIER CAS

Si chaque valeur du caractère n'est répétée qu'une seule fois alors la moyenne $\overline{x} = \frac{\text{Somme des valeurs}}{\text{Effectif total}}$

DEUXIEME CAS

Si chaque valeur est répétée, on multiplie la valeur par le nombre de fois qu'elle est répétée et puis on fait la somme des produits qu'on divise par l'effectif total.

• DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF CONTINU

Pour calculer la moyenne $\overline{x}$ dans le cas d'un caractère quantitatif continu on procède comme suit :
1°) On se ramène au cas d'un caractère quantitatif discret où les nouvelles valeurs (modalités) du caractère sont les centres des classes.
2°) On calcule alors la moyenne comme dans le deuxième cas en 1°/.

APPLICATION

EXERCICE N° 11

Les notes de mathématiques d'Aïssatou au premier semestre sont :
8 ; 10 ; 13 ; 9 : 12
1°) Quelle est la population étudiée ?
Le caractère est-il quantitatif ou qualitatif ?
2°) Calculer l'étendue E de la série.
3°) Justifier que la moyenne de la série est $\bar{x} = 10$ arrondie à une unité près.

SOLUTION

1°) Donnons la population étudiée

La population étudiée est un ensemble de notes.
Le caractère est quantitatif discret prenant 5 valeurs qui sont :
8 ; 10 ; 13 ; 9 et 12

2°) Calculons l'étendue E de la série.

Les deux valeurs extrêmes de la série sont 8 et 13 alors l'étendue
$E = 13 - 8 = 5$

3°) Justifions que la moyenne de la série est $\bar{x} = 10$ arrondie à une unité près.

On est dans le premier cas et on a :

Puisque chacun des cinq notes n'est répétée qu'une seule fois alors le total des notes est 5. Il s'ensuit que : $\bar{x} = \frac{8+10+13+9+12}{5} = \frac{52}{5} = 10{,}4$
En arrondissant à l'unité près, on a : $\bar{x} = 10$.

EXERCICE N° 12

On a relevé les résultats suivants à partir d'un bulletin de notes d'élève :
Mathématiques : 12/20 coefficient 4
Dictée : 3/20 coefficient 1
Rédaction : 11/20 coefficient 2
HG : 8/20 coefficient 2

SVT : 10/20 coefficient 2

1°) Répondre par vrai ou faux puis justifier

a) La population statistique étudiée est un ensemble d'élèves.

b) Le caractère est quantitatif discret prenant 5 valeurs

2°)

a) Traduire les données dans un tableau statistique

c) Calculer la moyenne $\bar{x}$

SOLUTION

1°)

Répondons par vrai ou faux puis justifions

a) La population statistique étudiée est un ensemble d'élèves. **FAUX**

La population étudiée est un ensemble de notes sur 20.

b) Le caractère est quantitatif discret prenant 5 valeurs : **VRAI**

Les différentes valeurs sont : 3 ; 8 ; 10 ; 11 et 12 et sont au nombre de 5.

2°)

a) Traduisons les données dans un tableau statistique

Mathématiques : 12/20 coefficient 4

Cela veut dire que la note 12 est prise 4 fois donc d'effectif partiel 4.

On raisonne de la même façon pour les autres notes.

On a donc le tableau comme suit :

Notes	3	8	10	11	12	Total
Effectifs	1	2	2	2	4	11

c) Calculons la moyenne $\bar{x}$

On a : $\bar{x} = \frac{3\times1+8\times2+10\times2+11\times2+12\times4}{11} = \frac{109}{11} = 9{,}90$

EXERCICE N° 13

Une enquête menée sur les salaires des 50 ouvriers d'une petite et moyenne entreprise (PME) a donné les résultats suivants consignés dans un tableau.

Salaires	$[40;60[$	$[60;80[$	$[80;100[$	Total
Effectifs	10	35	5	50

1°) Reprendre et compléter le tableau par des valeurs centrales.

2°) Déterminer la classe modale.

3°) Calculer le salaire moyen

SOLUTION

1°) Reprenons et complétons le tableau par les centres des classes.

Les classes sont d'égale amplitude égale à : $60 - 40 = 20$ (en milliers)

Le centre de la classe $[40; 60[$ est égal à : $\frac{40+60}{2} = \frac{100}{2} = 50$

Puisque les classes sont d'égale amplitude 20 alors le centre de la classe $[60; 80[$ venant aussitôt après la classe $[40; 60[$ est égal à : $50 + 20 = 70$.

La classe $[80; 100[$ vient aussitôt après la classe $[60; 80[$ de centre 70 alors le centre de la classe $[80; 100[$ est égal à : $70 + 20 = 90$.

On a donc le tableau ci-dessous :

Salaires	$[40; 60[$	$[60; 80[$	$[80; 100[$	Total
Centres	50	70	90	
Effectifs	10	35	5	50

2°) Déterminons la classe mode.

La classe est par définition la classe ayant le plus grand effectif, ou encore ayant la plus grande fréquence ou encore ayant le plus grand pourcentage.

La classe modale est donc ici, la classe $[60; 80[$.

3°) Calculons le salaire moyen $\bar{x}$

On utilise les centres des classes. Comme il y a 10 ouvriers dans la classe $[40; 60[$ et ne connaissant pas exactement le salaire de chaque ouvrier alors on suppose que dans cette classe chaque ouvrier a 50(en milliers de francs) qui représente le centre de la classe. On applique le même raisonnement aux autres classes et on a : $\bar{x} = \frac{50\times10+70\times35+90\times5}{50} = 68$ en milliers de francs.

Le salaire moyen s'élève à $68\ 000 f\ CFA$.

■ MÉDIANE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

• DÉFINITION

On appelle médiane d'une série statistique que, noté M_e , la valeur du caractère qui partage la série en deux séries telles que 50% des individus ont des valeurs inférieures ou égales à M_e et 50% des individus ont des valeurs supérieures ou égales à M_e .

• CALCUL DE LA MÉDIANE DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF DISCRET

Pour déterminer la médiane, on procède comme suit :

- On ordonne les valeurs de la série en écrivant chaque fois qu'une valeur est répétée.
- On calcule le rang ou encore la position de la médiane en calculant les 50% de l'effectif total.

APPLICATION

EXERCICE N° 14

On désigne deux séries statistique par S_1 et S_2 telles que :

• S_1 (tailles (en cm)) de 11 élèves notées en vrac :

132 ; 150 ; 180 ; 150 ; 130 ; 152 ; 180 ; 181 ; 132 ; 160 ; 182

• S_2 : notes d'un élève sur son travail semestriel

Notes	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Total
Effectifs	4	3	8	3	2	4	3	2	1	30

1°) Déterminer la taille médiane M_e de la série S_1
2°) Déterminer la note médiane M_e de la série S_2

SOLUTION

1°) Déterminons la valeur médiane M_e de la série S_1

• Ordonnons d'abord la série S_1

On a un caractère quantitatif discret et en ordonnant la série, on a :

130 ;132 ;132 ;150 ;150 ;**152** ;160 ;180 ;180 ;181 ;182

Par définition M_e est la valeur telle que 50% des individus ont des tailles inférieures ou égales à M_e

• Déterminons ensuite le rang de la médiane.

L'effectif total étant de 11 alors on calcule les 50% de 11.

On a : $\frac{50\times11}{100} = 5{,}5$

La taille médiane est donc la sixième taille de la série ordonnée c'est donc la taille 152.

Il vient : $M_e = 152$

2°) Déterminons la note médiane M_e de la série S_2

Les valeurs sont déjà ordonnées dans le tableau. La somme totale des effectifs est égale à 30.

En calculant les 50% de 30, on trouve : $\frac{50\times30}{100} = 15$

Alors la médiane est la demi - somme des 15ème et 16ème notes qui sont 8 et 9.

Il vient : $Me = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$ alors 8,5 est la note médiane.

Il y a 15 élèves qui ont des notes inférieures ou égales à 8,5 et 15 autres élèves ont des notes supérieures ou égales à 8,5.

• CALCUL DE LA MÉDIANE DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF CONTINU

Pour déterminer la médiane, on procède comme suit :

1°) On trace une courbe cumulative et on détermine la médiane en utilisant le théorème de Thalès.

Exemple : En utilisant la courbe cumulative des effectifs cumulés, on procède comme suit :

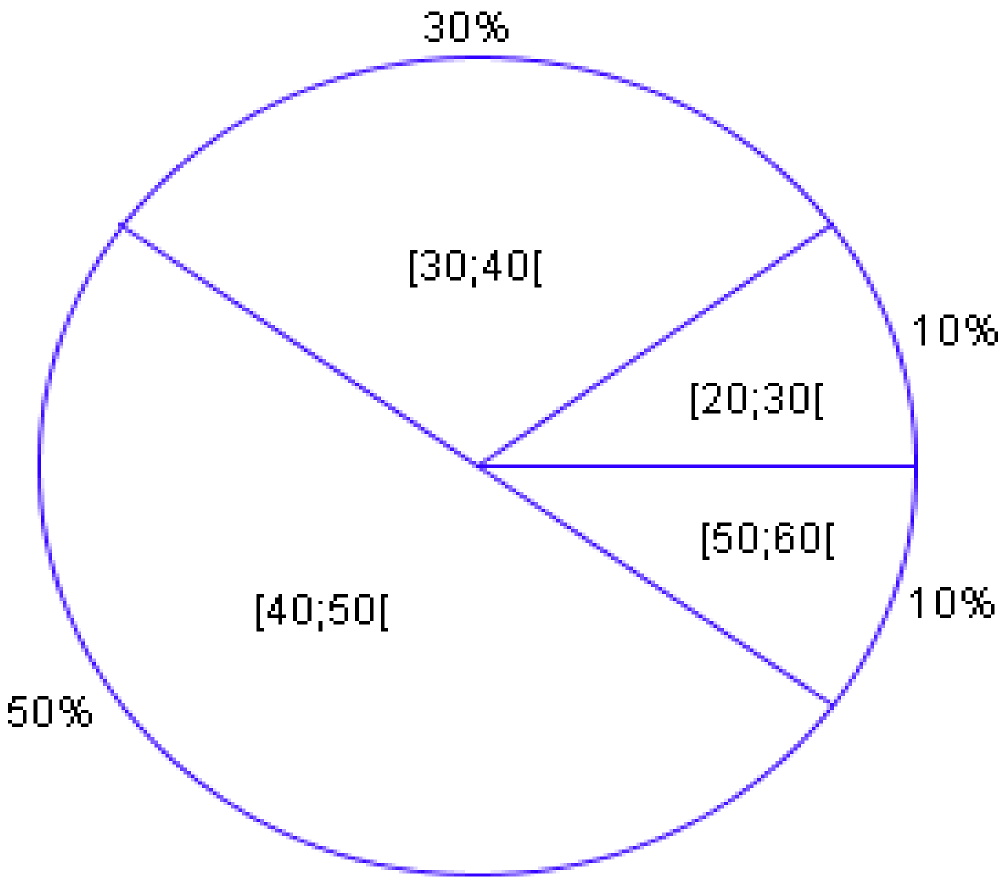
2°) Si la somme des effectifs est N alors à partir du point d'ordonnée $\frac{N}{2}$ de l'axe des ordonnées on trace la parallèle à l'axe des modalités qui coupe la courbe cumulative en un point et de ce point on trace une parallèle à l'axe des ordonnées qui tombe sur une valeur de l'axe des modalités ; cette valeur est , par définition, la médiane de la série.

APPLICATION

EXERCICE N° 15

Un professeur de mathématiques a relevé le temps mis (en mn) par 50 élèves pour traiter un exercice de mathématiques.

Les résultats sont consignés dans un diagramme circulaire comme suit :



1°) Reprendre et compléter le tableau ci-dessous à partir des informations fournies par le diagramme circulaire.

Valeurs du caractère	……	……	……	……	Total
Effectifs					50
Effectifs cumulés croissants					
Effectifs cumulés décroissants					

2°)
a) Représenter dans un même graphique l'histogramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
b) Tracer la courbe cumulative des effectifs cumulés croissants et celle des effectifs cumulés décroissants dans le même graphique.
En déduire la classe médiane.
3°) Déterminer, par la méthode de Thalès, le temps médian M_e.

SOLUTION

1°) Reprenons et complétons le tableau.

Le diagramme circulaire montre qu'il s'agit d'un caractère quantitatif continu. Les quatre valeurs du caractères sont : $[20; 30[$; $[30; 40[$; $[40; 50[$ et $[50; 60[$.

10% des élèves ont mis entre 20mn et 30mn pour rendre leurs devoirs et ils sont au nombre de $\frac{50\times10}{100}$,soit 5

Il s'ensuit que l'effectif partiel de la classe $[20;30[$ est 5.

On procède de même pour calculer les effectifs partiels des autres classes.

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-après :

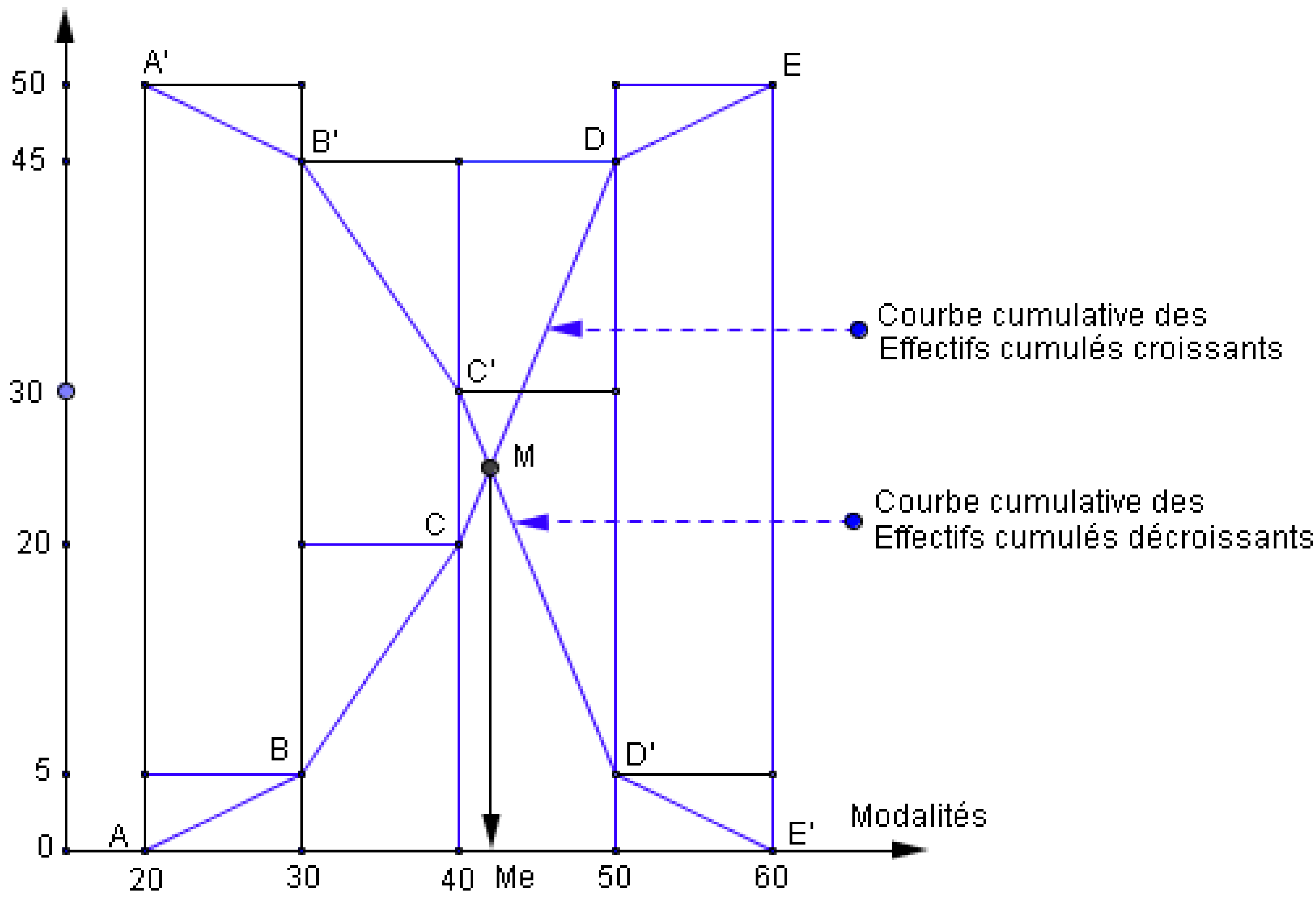
Valeurs du caractère	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[40;50[$	Total
Effectifs	5	15	25	5	50
Effectifs cumulés croissants	5	20	45	50	
Effectifs cumulés décroissants	50	45	30	5	

2°)

a) Représentons dans un même graphique l'histogramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.

On a le graphique ci-dessous en prenant 1 cm pour 5 effectifs :

b) Traçons la courbe cumulative des effectifs cumulés croissants et celle des effectifs cumulés décroissants dans le même graphique.

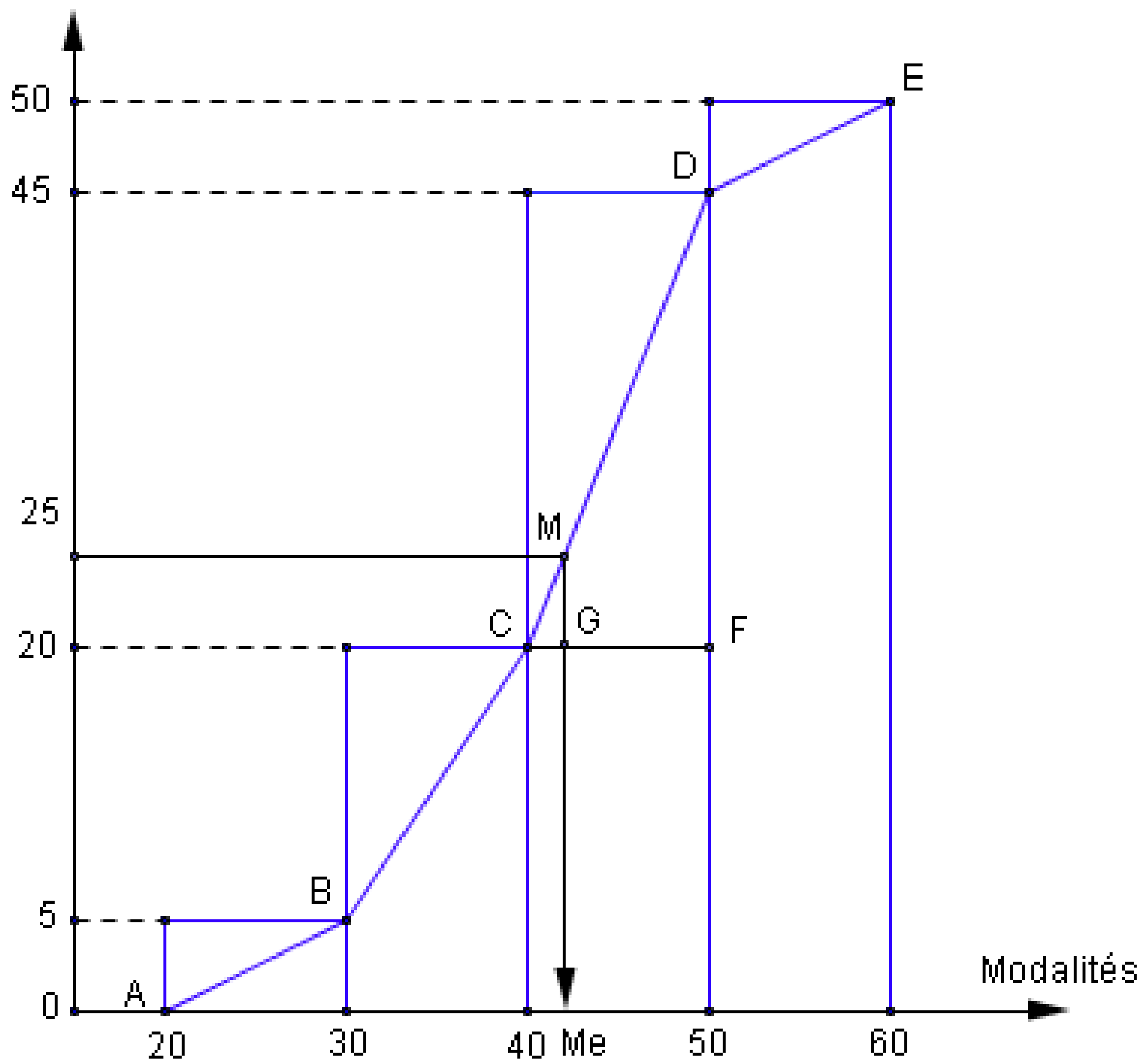


La courbe cumulative des effectifs cumulés croissants passe par les points :
$A(20\,;0)$; $B(30\,;5)$; $C(40\,;20)$; $D(50\,;45)$ et $E(60\,;50)$.
La courbe cumulative des effectifs cumulés croissants passe par les points :
$A'(20\,;50)$; $B'(30\,;45)$; $C'(40\,;30)$; $D'(50\,;5)$ et $E'(60\,;0)$.
On constate que les deux courbes se coupent en M dont son abscisse M_e appartient à la classe $[40;50[$.
Il vient : La classe $[40;50[$ est la classe médiane.

3°) Déterminons le temps médian.

On a deux choix et chacun d'eux peut nous amener au résultat :
Premier choix :
On peut partir de l'histogramme des effectifs cumulés croissants et leur courbe cumulative indiqué comme indiqué dans le graphique
On peut appliquer la méthode de Thalès pour calculer la médiane.
Comme l'effectif total est de 50 alors la médiane est l'abscisse associée à l'ordonnée 25.
De l'ordonnée 25 on trace une parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe la courbe cumulative au point M d'abscisse Me.

On a le graphique ci-dessous :



On constate que $Me \in [40; 50[$; $G \in [CF]$; $M \in [CD]$ et $(GM)//(FD)$ de la

propriété de Thalès, il vient : $\frac{CG}{CF} = \frac{GM}{FD}$

Or :

• $CG = Me - 40$
• $CF = 50 - 40 = 10$
• $GM = 25 - 20 = 5$

• et $FD = 45 - 20 = 25$

De $\frac{CG}{CF} = \frac{GM}{FD}$, on a successivement :

$\frac{Me-40}{10} = \frac{5}{25}$

$\frac{Me-40}{10} = \frac{1}{5}$ soit $-40 = 10 \times \frac{1}{5} = 2$. Il vient : $Me = 40 + 2 = 42$.

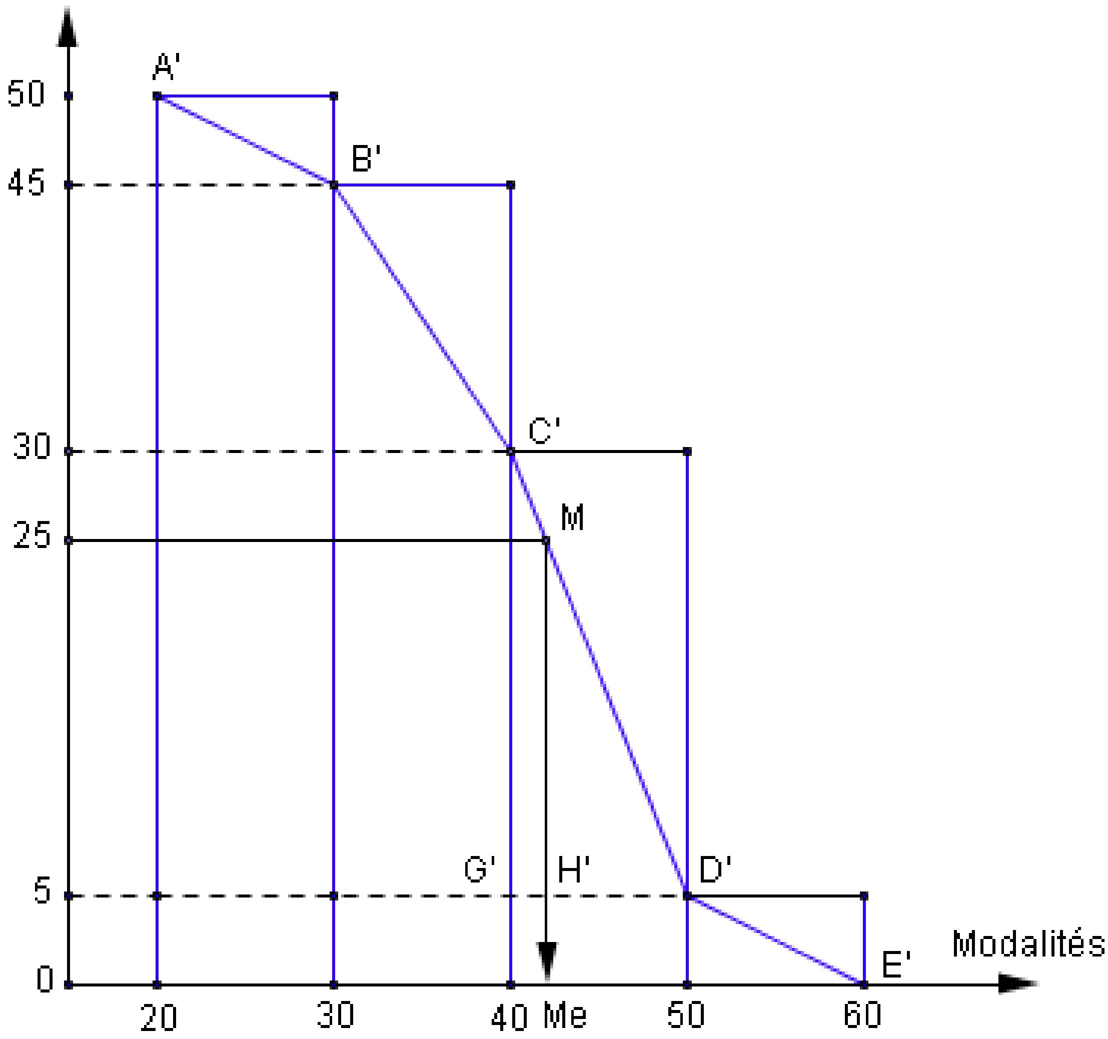
Le temps médian est donc 42mn c'est-à-dire que la moitié des élèves ont rendu leurs copies en un temps n'excédant pas 42 mn et l'autre moitié en un temps au moins égal à 42 mn .

Deuxième choix :

On peut partir de l'histogramme des effectifs cumulés croissants et leur courbe cumulative donné par le graphique ci-contre :

On peut appliquer la méthode de Thalès pour calculer la médiane.
On peut appliquer la méthode de Thalès pour calculer la médiane.

De l'ordonnée 25 on trace une parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe la courbe cumulative au point M d'abscisse Me. On a le graphique ci-dessous :



On constate que $Me \in [40;50[$; $H' \in [G'D']$; $M \in [C'D']$ et $(G'C')//(H'M)$ alors de la propriété de Thalès, il vient : $\frac{D'H'}{D'G'} = \frac{H'M}{G'C'}$

Or :

• $D'H' = 50 - Me$

• $D'G' = 50 - 40 = 10$

• $H'M = 25 - 5 = 20$

• et $G'C' = 30 - 5 = 25$

De $\frac{D'H'}{D'G'} = \frac{H'M}{G'C'}$, on a successivement :

$\frac{50-Me}{10} = \frac{20}{25}$

$\frac{50-Me}{10} = \frac{4}{5}$ soit $50 - Me = 10 \times \frac{4}{5} = 8$. Il vient : $Me = 50 - 8 = 42$.

Le temps médian est donc 42mn

Nous retrouvons le même résultat.

On peut aussi utiliser les pourcentages cumulés ou les fréquences cumulées dans le calcul de la médiane et nous procéderons comme nous venons de le faire.

■ PREMIER QUARTILE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

• DÉFINITION

On appelle premier quartile d'une série statistique, noté Q_1 , la valeur du caractère qui partage la série en deux séries telles que 25% des individus ont des valeurs inférieures ou égales à Q_1 et 75% des individus ont des valeurs supérieures ou égales à Q_1 .

• CALCUL DU PREMIER QUARTILE DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF DISCRET

Pour déterminer la médiane, on procède comme suit :
1°) On ordonne les valeurs de la série en écrivant chaque fois qu'une valeur est répétée.
2°) On calcule le rang ou encore la position de la médiane en calculant les 50% de l'effectif total.

APPLICATION

EXERCICE N° 16

Une épreuve de saut en hauteur effectuée par 15 candidats a permis de noter la série statistique brute suivante :

105	190	175	185	185
110	180	105	170	169
120	160	165	114	200

1°) Réécrire la série en l'ordonnant.
2°) Calculer l'étendue E
3°) Calculer le premier quartile Q_1
Interpréter le résultat obtenu.

SOLUTION

1°) Réécrivons la série en l'ordonnant.

Ordonnons la série dans l'ordre croissant des valeurs. Nous avons
105 – 105 – 110 – 114 – 120 – 160 – 165 – 169 – 170 – 175 – 180 – 185 – 185– 190 - 200

2°) Calculons l'étendue E

Les deux valeurs extrêmes sont 105 et 200 alors $E = 200 - 105 = 95$

3°) Calculons le premier quartile Q_1

Calculons le rang du premier quartile
Comme l'effectif total est de 15 alors en prenant les 25% de 15, on a :
$\frac{15\times25}{100} = 3{,}75$. Le premier quartile occupe donc la quatrième position de la série ordonnée.
Il vient : $Q_1 = 114$.

Interprétons le résultat obtenu.

Il y a 4 candidats qui ont franchi une hauteur au plus égale à 114 cm et 14 candidats ont franchi une hauteur au moins égale à 114 cm.

■ CALCUL DU PREMIER QUARTILE DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF CONTINU

Pour déterminer le premier quartile on procède comme suit :
On trace une courbe cumulative et on détermine le premier quartile en utilisant le théorème de Thalès en procédant comme suit :
Si la somme des effectifs est N alors à partir du point d'ordonnée $\frac{N}{4}$ de l'axe des ordonnées on trace la parallèle à l'axe des modalités qui coupe la courbe cumulative en un point et de ce point on trace une parallèle à l'axe des ordonnées qui tombe sur une valeur de l'axe des modalités ; cette valeur est par définition le premier de la série.

APPLICATION

EXERCICE N° 17

Un laboratoire d'un centre hospitalier a réalisé des analyses sur le taux de glycémie en mg/L à jeun de 50 patients et les résultats sont donnés dans le tableau ci-après :

Taux	$[0,65; 0,75[$	$[0,75; 0,85[$	$[0,85; 0,95[$	$[0,95; 1,05[$	$[1,05; 1,15[$
Effectifs	5	15	20	8	2

1°) Reprendre le tableau et le compléter par les effectifs cumulés croissants et
par les pourcentages cumulés croissants.
2°) Tracer l'histogramme des effectifs cumulés croissants et le diagramme des effectifs croissants.
Utiliser la méthode dite de Thalès pour calculer le premier quartile Q_1
Interpréter le résultat obtenu.
3°) Recalculer la valeur de Q_1 en utilisant l'histogramme des pourcentages cumulés croissants. Quelle conclusion en tirer ?

SOLUTION

1°) Reprenons le tableau complété par les effectifs cumulés croissants et par les pourcentages cumulés croissants.

Le pourcentage de la modalité $[0,65; 0,75[$ est $\frac{100\times5}{50}$ soit 10%

On en déduit que les modalités $[0,75; 0,85[$ et $[0,85; 0,95[$ ont respectivement pour pourcentages 30% et 40%.

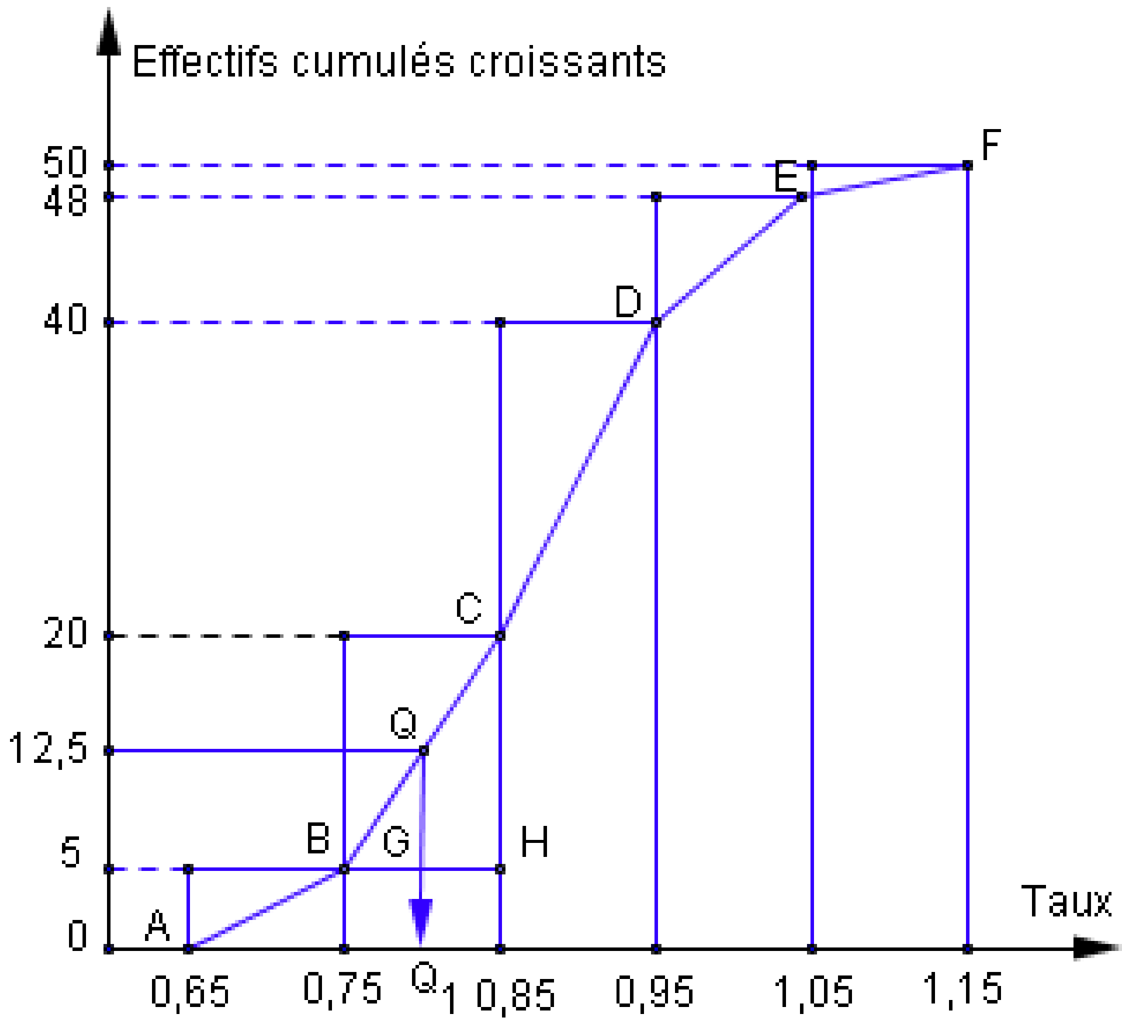
Le pourcentage de la modalité $[1,05; 1,15[$ est $\frac{100\times2}{50}$ soit 4%

On en déduit que le pourcentage de la modalité $[0,95; 1,05[$ est 16%. Il vient :

Taux	$[0,65; 0,75[$	$[0,75; 0,85[$	$[0,85; 0,95[$	$[0,95; 1,05[$	$[1,05; 1,15[$
Effectifs	5	15	20	8	2
E.C.C	5	20	40	48	50
Pourcentage	10	30	40	16	4
P.C.C	10	40	80	96	100

2°) Traçons l'histogramme des effectifs cumulés croissants et le diagramme des effectifs croissants.

Prenons 1 effectif pour 0,1 unité. On a alors l'histogramme ci-dessous :

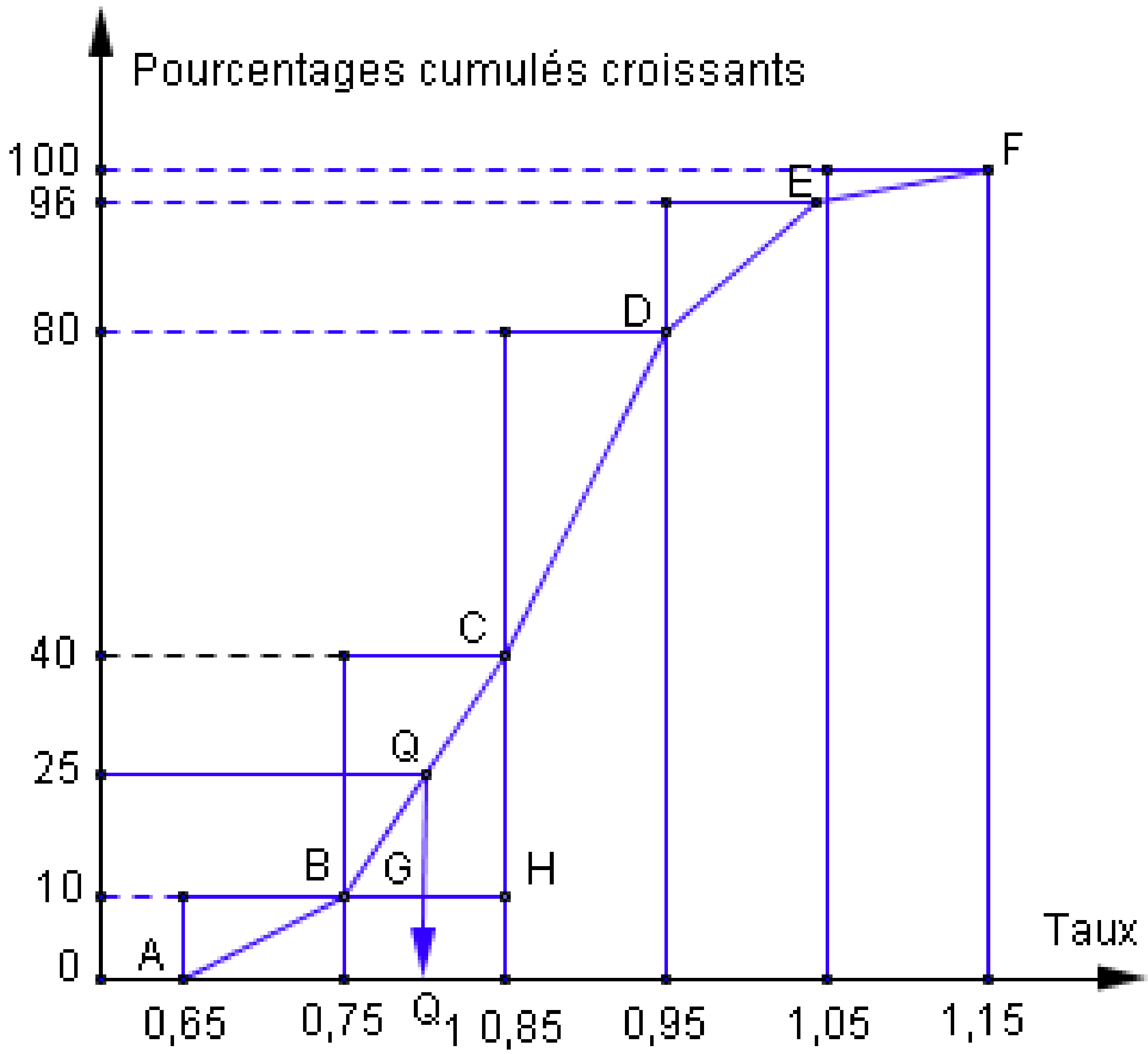


Le diagramme des effectifs cumulés croissants passe par les points de coordonnées
$A(0{,}65; 0)$;$B(0{,}75; 5)$; $C(0{,}85; 20)$ $D(0{,}95; 40)$;
$E(1{,}05; 48)$ et $F(1{,}15; 50)$.
Utilisons la méthode dite de Thalès pour calculer le premier quartile Q_1
L'effectif total étant de 50 alors le quart de 50 est 12,5.
De l'ordonnée 12,5, on trace une parallèle à l'axe des modalité qui coupe le diagramme cumulative en Q et du point Q on trace une parallèle à l'axe des effectifs cumulés croissants qui tombe sur une valeur de l'axe des modalités.
Cette valeur est donc Q_1.
Les point B, G et H d'une part et les points B, Q et C d'autre part sont alignés dans le même ordre et en plus $(GQ)//((HC)$ alors d'après Thalès $\frac{BG}{BH} = \frac{GQ}{HC}$
Or $BG = Q_1 - 0{,}75$; $BH = 0{,}85 - 0{,}75 = 0{,}1$; $GQ = 12{,}25 - 5 = 7{,}25$ et $HC = 20 - 5 = 15$ donc $\frac{BG}{BH} = \frac{GQ}{HC}$ équivaut à $\frac{Q_1 - 0{,}75}{0{,}1} = \frac{7{,}25}{15}$
On a successivement :
$Q_1 - 0{,}75 = \frac{7{,}25}{15} \times 0{,}1$
$Q_1 = 0{,}75 + \frac{7{,}25}{15} \times 0{,}1 = 0{,}75 + 0{,}0483 = 0{,}79833$
En prenant la valeur arrondie au dixième près, on a : $Q_1 = 0{,}8$
Alors 25% des patients ont un taux de glycémie au plus égal à 0,798 mg/L.

3°) Recalculons la valeur de Q_1 en utilisant l'histogramme des pourcentages cumulés croissants.

On utilise l'histogramme des effectifs cumulés croissants en remplaçant les effectifs cumulés croissants par leurs pourcentages respectifs.

On a ci-dessous :



Le diagramme des pourcentages cumulés croissants passe par les points de coordonnées $A(0{,}65; 0)$; $B(0{,}75; 10)$; $C(0{,}85; 40)$; $D(0{,}95; 80)$; $E(1{,}05; 96)$ et $F(1{,}15; 100)$.

Utilisons la méthode dite de Thalès pour calculer le premier quartile Q_1

Le pourcentage total étant de 100 alors le quart de 100 est 25.

De l'ordonnée 25, on trace une parallèle à l'axe des modalité qui coupe le diagramme cumulative en Q et du point Q on trace une parallèle à l'axe des pourcentages cumulés croissants qui tombe sur une valeur de l'axe des modalités. Cette valeur est donc Q_1.

Les point B, G et H d'une part et les points B, Q et C d'autre part sont alignés dans le même ordre et en plus $(GQ)//((HC)$ alors d'après Thalès $\frac{BG}{BH} = \frac{GQ}{HC}$

Or $BG = Q_1 - 0{,}75$; $BH = 0{,}85 - 0{,}75 = 0{,}1$; $GQ = 25 - 10 = 15$ et $HC = 40 - 10 = 30$ donc $\frac{BG}{BH} = \frac{GQ}{HC}$ équivaut à $\frac{Q_1 - 0{,}75}{0{,}1} = \frac{15}{30}$

On a successivement :

$Q_1 - 0{,}75 = \frac{15}{30} \times 0{,}1$

$Q_1 = 0{,}75 + \frac{15}{30} \times 0{,}1 = 0{,}75 + 0{,}05 = 0{,}8$

Nous retrouvons donc la valeur pour Q_1.

■ TROISIÈME QUARTILE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

• DÉFINITION

On appelle troisième quartile d'une série statistique noté Q_3 , la valeur du caractère qui partage la série en deux séries telles que 75% des individus ont des valeurs inférieures ou égales à Q_3 et 25% des individus ont des valeurs supérieures ou égales à Q_3 .

• CALCUL DU TROISIÈME QUARTILE DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF DISCRET

Pour déterminer le troisième quartile, on procède comme suit :

1°) On ordonne les valeurs de la série en écrivant chaque fois qu'une valeur est répétée.

2°) On calcule ensuite les 25% de l'effectif total qui donne la position ou encore le rang du troisième quartile.

APPLICATION

EXERCICE N° 18

On a contrôlé les vitesses (en km/h) avec lesquelles roulent 11 automobilistes sur une distance de 200 km. On a obtenu la série suivante :

$$40 - 70 - 60 - 70 - 50 - 80 - 90 - 60 - 70 - 80 - 85$$

1°) Calculer les effectifs cumulés croissants de la série.

2°) Calculer le troisième quartile Q_3 de la série.

Interpréter le résultat obtenu.

SOLUTION

1°) Calculons les effectifs cumulés croissants de la série.

Organisons les données dans un tableau statistique.

Nous avons :

Vitesses en km/h	40	50	60	70	80	85	90	Total
Effectifs	1	1	2	3	2	1	1	11
Effectifs cumulés croissants	1	2	4	7	9	10	11	

2°) Calculons le troisième quartile Q_3 de la série.

Le rang du troisième quartile est $\frac{3}{4} \times N$ où N est l'effectif total.

On a donc : $\frac{3}{4} \times N = \frac{3}{4} \times 11 = 8{,}25$.

Alors le troisième quartile Q_3 est la neuvième valeur de la série ordonnée.

Comme la série est ordonnée dans le tableau statistique et avec les effectifs cumulés croissants, la neuvième valeur est 80 d'où : $Q_3 = 80$

Tranches de salaires	$[0;50[$	$[50;100[$	$[100;150[$	$[150;200[$
Fréquences				
Fréquences cumulées croissantes				

Interprétons le résultat obtenu.
Il y a environ 75% des automobilistes qui roulent au plus 80 km/h pour effectuer le trajet.

• CALCUL DU TROISIÈME QUARTILE DANS LE CAS D'UN CARACTÈRE QUANTITATIF CONTINU

Pour déterminer le troisième quartile on procède comme suit :
On trace une courbe cumulative et on détermine le troisième quartile en utilisant le théorème de Thalès en procédant comme suit :

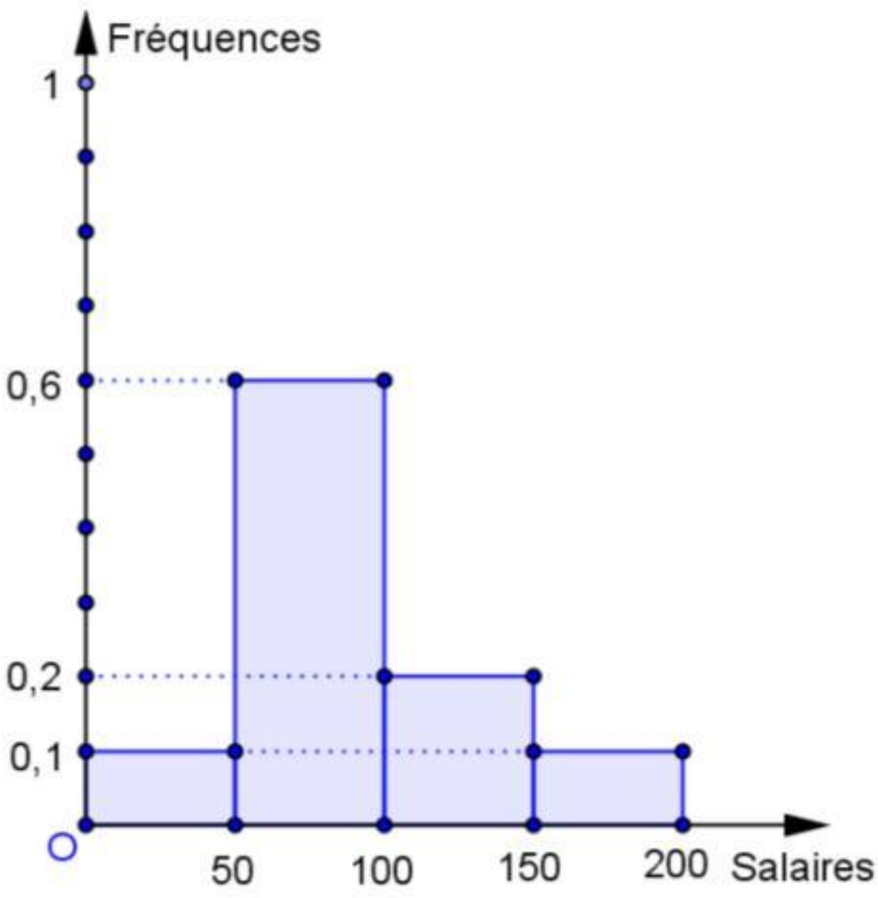
Si la somme des effectifs est N alors à partir du point d'ordonnée $\frac{3N}{4}$ de l'axe des ordonnées on trace la parallèle à l'axe des modalités qui coupe la courbe cumulative en un point et de ce point on trace une parallèle à l'axe des ordonnées qui tombe sur une valeur de l'axe des modalités ; cette valeur est par définition le troisième de la série.

APPLICATION

EXERCICE N° 19

Une étude statistique menée sur les tranches de salaires exprimés en milliers de francs CFA de 50 ouvriers d'une entreprise a donné les résultats consignés dans un histogramme des fréquences :
1°) Commenter le schéma
1°) Reprendre et compléter le tableau ci-après à partir des informations contenues dans le schéma

2°) Tracer l'histogramme des fréquences cumulées croissantes.
3°) En utilisant le diagramme des fréquences cumulées croissantes déterminer le troisième quartile Q_3 de la série.
Interpréter le résultat obtenu.



SOLUTION

1°) Commentons le schéma

Nous avons une série statistique à caractère quantitatif continu prenant quatre valeurs qui sont des tranches de salaires.

Chaque tranche de salaires est définie par sa fréquence et la tranche de salaire qui a la plus grande fréquence est la tranche de salaires $[50; 100[$ c'est-à-dire que la majorité des ouvriers de cette entreprise ont des salaires au moins égaux à 50 000 f CFA et inférieurs à 100 000 f CFA.

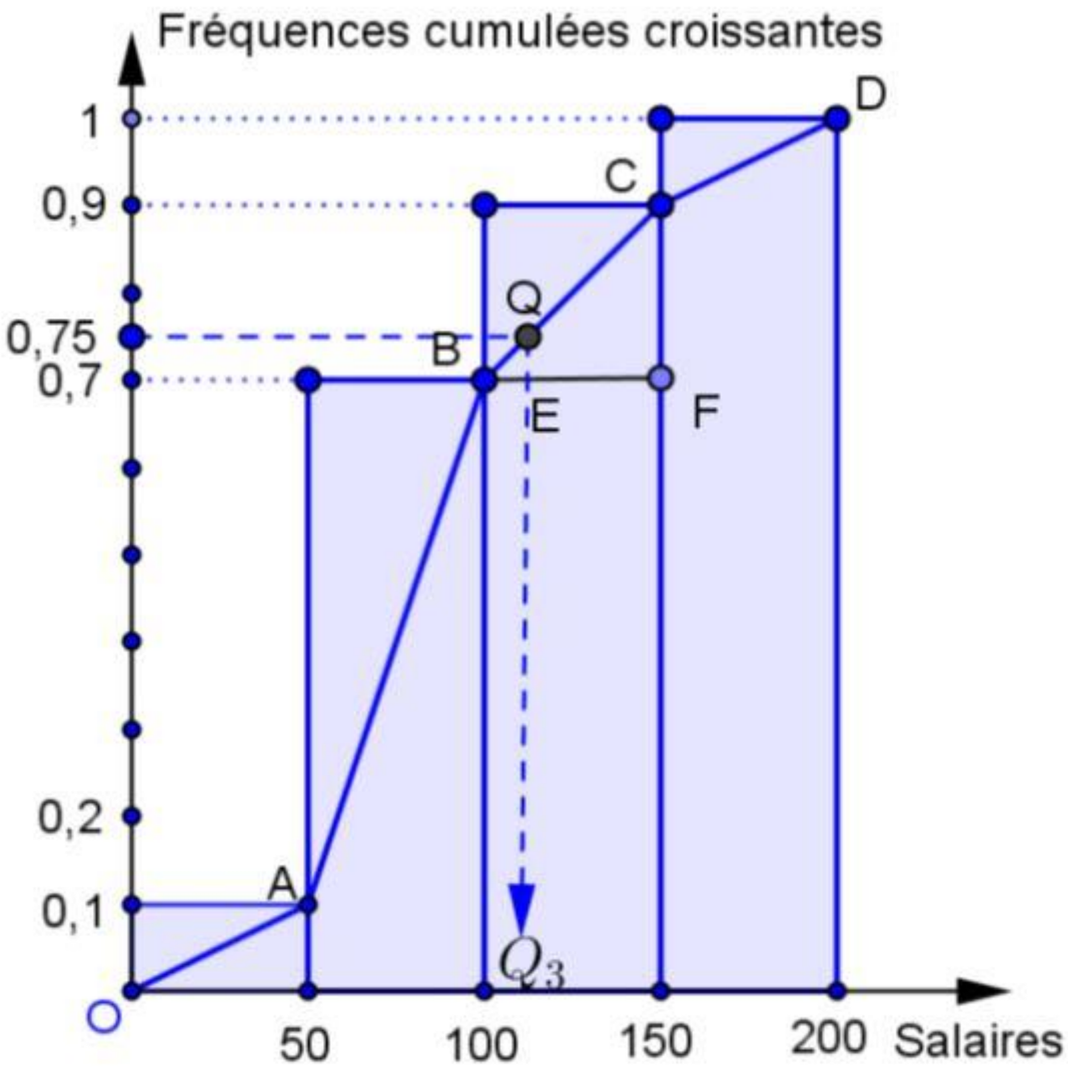
Du schéma, on a :

Tranches de salaires	$[0; 50[$	$[50; 100[$	$[100; 150[$	$[150; 200[$
Fréquences	0,1	0,6	0,2	0,1
Fréquences cumulées croissantes	0,1	0,7	0,9	1

2°) Traçons l'histogramme des fréquences cumulées croissantes.

Le diagramme des fréquences cumulées croissantes passe par les points $O(0; 0)$; $A(50; 0{,}1)$;$B(100; 0{,}7)$; $C(150; 0{,}9)$; $D(200; 1)$

Nous avons la figure ci-après :



3°) En utilisant le diagramme des fréquences cumulées croissantes déterminons le troisième quartile Q_3 de la série.

De l'ordonnée 0,75, on trace une parallèle à l'axe des modalités qui coupe le diagramme cumulative en Q et du point Q on trace une parallèle à l'axe des fréquences cumulées croissantes qui tombe sur une valeur de l'axe des modalités. Cette valeur est donc Q_3.

Les point B, E et F d'une part et les points B, Q et C d'autre part sont alignés dans le même ordre et en plus $(EQ)//((FC)$ alors d'après Thalès $\frac{BE}{BF} = \frac{EQ}{FC}$

Or $BE = Q_3 - 100$; $BF = 150 - 100 = 50$; $EQ = 0{,}75 - 0{,}7 = 0{,}05$ et

$FC = 0{,}9 - 0{,}7 = 0{,}2$ donc $\frac{BE}{BF} = \frac{EQ}{FC}$ équivaut à $\frac{Q_3 - 100}{50} = \frac{0{,}05}{0{,}2}$

On a successivement :

$Q_3 - 100 = \frac{0{,}05}{0{,}2} \times 50$

$Q_3 = 100 + \frac{0{,}05}{0{,}2} \times 50 = 112{,}5$

Il y a 75% des ouvriers de l'entreprise qui touchent au plus 112 500 f CFA.

C'est suite à nos critiques sur l'épreuve que je me suis résolu à partager ce cours à fin :
• de renforcer la capacité de nos jeunes collègues
• de mettre à la disposition des candidats niveau BFEM d'aborder des exercices de statistique avec confiance

C'est un document qui doit intéresser tout le monde en ce sens que la statistique nous permet d'organiser nos données .

C'est une discipline qui réunit les littéraires et les scientifiques et à un niveau plus avancé que les classes de troisième, elle nous permet de faire des prévisions fiables.

Bonne lecture et impatient de recevoir des critiques et des suggestions

(*) Lassana CISSOKHO est professeur de mathématiques, anciennement Membre de la Commission Nationale de Mathématiques, Conseiller pédagogique à l'IREMPT